6 | ع 1 المحاضرة

تمرين: لتكن المجموعة $X = \{a, b, c\}$ وقياس العد

$$\mu : 2^X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$

$$A \longrightarrow \mu(A) = |A|$$

احسب قياس كل مجموعة وبين نوع القياس (منته، σ منته، غير منته)

الحل: لدينا $2^X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

$\mu(\emptyset) = 0$

$\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = \mu(\{c\}) = 1$

$\mu(\{a,b\}) = \mu\{a,c\} = \mu(\{b,c\}) = 2$

$\mu(\{a,b,c\}) = 3$

نلاحظ أن القياس منته لأن $\mu(A) \leq 3 \; ; \; \forall A \in 2^X$

أو بشكل آخر $\mu(X) = 3 < \infty$

تمرين: لتكن $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية وقياس العد

$$\mu : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$

$$A \longrightarrow \mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{عدد عناصر } A \text{ إذا كانت } A \text{ منتهية} \\ +\infty & A \text{ غير منتهية} \end{cases}$$

والمطلوب: احسب قياس المجموعات التالية:

$\{1\}, \{1,2\}, \{1,2\}, \{5,6,7 \ldots 100\}, \mathbb{N}$

{ مجموعة الأعداد الزوجية } { مجموعة الأعداد الأولية }

$D = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 4, 9, 16 \ldots\}$

(ب) ما نوع القياس (منته، غير منته)

الحل (2)

$M(\{1\}) = 1$

$M(\{1,2\}) = 2$

$M(\{1,2\}) = 1$

$M(\{5,6,7 \ldots 100\}) = 96$

$M(\mathbb{N}) = +\infty$

$M(\{$ مجموعة الأعداد الأولية $\}) = +\infty$

$M(\{$ مجموعة الأعداد الزوجية $\}) = +\infty$

$M(D) = +\infty$

(ب) نلاحظ أن القياس غير منته لكنه منته σ لأن المجموعات $\{1\}, \{2\}, \ldots \in 2^{\mathbb{N}}$ ذات قياس منته وقياس كل منها $M\{n\} = 1 ; n = 1, 2, \ldots$

وهي منفصلة فنحن منتهٍ تماماً لأن $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \{n\}$

كما يمكن أخذ المجموعات المنتهية والمنفصلة مثنى مثنى فنجد أن

$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2, 3\}, A_3 \{4\}, A_4 = \{n, 4\} ; n = 1, 2$

حيث فنجد أن $M(A_1) = 1$

$M(A_2) = 2$

$M(A_3) = 1$

$M(A_4) = 1$

إذاً هو منته $W = \bigcup A_n$

تمرين (3) لتكن $X = \mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية وقياس العد:

$M : 2^{\mathbb{R}} \longrightarrow]-\infty, +\infty]$

$A \to M(A) = \begin{cases} |A| = A ; \end{cases}$ عدد عناصر A إذا كانت A منتهية

إذا كانت A غير منتهية $+\infty$

(1) احسب قياس المجموعات التالية:

$\{1\}, \{1,2\}, \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}, \{\pi\}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, [-1, +1], [a, +\infty[$

$]-\infty, 15[$

ب) مانوع هذا القياس (منته أو σ - منته) ؟

$$\mu(\{1\}) = 1$$
$$\mu(\{1,2\}) = 2$$
$$\mu(\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}) = 1$$
$$\mu(\{\pi^2\}) = 1$$
$$\mu(\mathbb{N}) = +\infty$$
$$\mu(\mathbb{Q}) = +\infty$$
$$\mu([-1, +1]) = +\infty$$
$$\mu([a, +\infty[) = +\infty$$
$$\mu(]-\infty, 15[) = +\infty$$

نلاحظ بأن القياس غير منته وهو ليس σ - منته لأنه لو فرضنا جدلاً أن قياس العد هذا هو قياس σ - منته عندئذ لا توجد مجموعات منتهية (أي أن قياس كل منها منته) ولنسمها $A_1, A_2, \ldots, A_n$

منفصلة مثنى مثنى وقياس كل منها $\mu(A_n) < \infty,\ n = 1, 2, \ldots$

واجتماعها $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$

نلاحظ أن المجموعة $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ معدودة يجب أن تكون $\mathbb{R}$ مجموعة معدودة وهذا غير صحيح

إذاً الفرض الجدلي خاطئ والقياس ليس σ - منته

ملاحظة: أن يكون القياس μ منته أو σ - منته أو غير ذلك فإن هذا الأمر متعلق بالمجموعة المرجعية X وبالصف $\mathcal{H}$ الذي عرف عليه القياس $\mu : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$

تمرين (4): على نصف الحلقة $\mathbb{R}$ كل $S = \{[a, b[: -\infty < a < b < +\infty\}$

نعرف دالة مجموعات بالشكل

$$\mu : S \to [0, +\infty]$$
$$[a, b[\longrightarrow \mu([a, b[) = b - a$$

المطلوب: اثبت أن الدالة μ موجبة، مضطردة، جمعية وسلمية، $\mu(\emptyset) = 0$

الحل: لنثبت أولاً أن الدالة μ موجبة:

$\mu([a, b[) = b - a \geq 0,\ \forall [a, b[\in S$ إذاً μ دالة موجبة

لتكن $[a, b[, [a', b'[\in S$ بحيث أن $[a, b[\subset [a', b'[$ عندئذ نجد أن:

$M([a,b[) = b-a \leq b'-a' = M([a',b'[)$ إذاً M دالة مضطردة

لتكن $[a_1,b_1[\,,\,[a_2,b_2[\in S$ منفصلتين:

$$M([a_1,b_1[\cup [a_2,b_2[) = (b_1-a_1)+(b_2-a_2)$$

$$= M([a_1,b_1[) + M([a_2,b_2[)$$ إذاً M دالة جمعية

أيضاً الدالة المستمرة لأن:

$\forall [a,b[\in S,\ M([a,b[) = b-a < \infty$ لدينا أيضاً $M(\emptyset) = M([a,a[) = a-a = 0$

(تمرين ٥) لتكن X مجموعة غير خالية، ولتكن $A \subset X$ ولتكن $I_A(x)$ الدالة المميزة للمجموعة A

لنعرف دالة مجموعات بالشكل $M_x : 2^X \to [0, +\infty]$

$$A \to M_x(A) = I_A(x)$$

<u>المطلوب</u>: اثبت أن الدالة موجبة ومضطردة وجمعية، M_x الخالية تساوي الصفر

أي $M_x(\emptyset) = 0$

<u>الحل</u>: الدالة المميزة هي من الشكل

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in A \\ 0 & ; x \in A \end{cases}$$

بما أن $\forall A \in 2^X,\ I_A(x) \geq 0$ فإن $M_x(A) = I_A(x)$ فإن M_x موجبة

* لتكن $A, B \in 2^X$ بحيث أن $A \subset B$ عندئذ يكون $I_A(x) \leq I_B(x)$

لذلك نجد أن $M_x(A) = I_A(x) \leq I_B(x) = M_x(B)$ إذاً M_x مضطردة متزايدة.

* لتكن $A_1, A_2, \dots \in 2^X$ منفصلة مثنى مثنى ولنثبت بأن

$$M_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M_x(A_n)$$

في الواقع من المساواة المعروفة:

$$I_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{A_n}(x)$$

نجد:

$$M_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{A_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M_x(A_n)$$

لدينا الآن $M_x(\emptyset) = I_{\emptyset}(x) = 0$

مما تقدم ينتج أن M_x تعرف قياساً على 2^X وهو قياس منتهٍ.